Quadratwurzeln
Übung

1. Berechnen Sie folgende Wurzeln im Kopf.

a) $\sqrt{49}$　b) $\sqrt{81}$　c) $\sqrt{64}$

d) $\sqrt{289}$　e) $\sqrt{1600}$　f) $\sqrt{169}$

g) $\sqrt{900}$　h) $\sqrt{196}$　i) $\sqrt{361}$

j) $\sqrt{225}$　k) $\sqrt{0{,}36}$　l) $\sqrt{0{,}0001}$

2. Schreiben Sie als Wurzel.

a) 12　b) 17　c) 11

d) 0,4　e) 2,5　f) 0,14

g) $\frac{3}{5}$　h) $\frac{1}{7}$　i) $\frac{11}{17}$

3. Ermitteln Sie folgende Wurzeln mit dem Taschenrechner und runden Sie jeweils auf drei geltende Ziffern.

a) $\sqrt{2}$　b) $\sqrt{3}$　c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt{666}$　e) $\sqrt{0{,}961}$　f) $\sqrt{0{,}7}$

4. Vervollständigen Sie die untenstehende Tabelle.

a			49		144		
$\sqrt{a}$	1	5		11		20	25

5. Vergleichen Sie jeweils die beiden Ausdrücke.

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

b) $\sqrt{144} + \sqrt{256}$ und $\sqrt{144+256}$

c) $\sqrt{169} - \sqrt{25}$ und $\sqrt{169-25}$

6. Eine Quadratwurzel wird potenziert, indem man den Radikanden in gleicher Weise potenziert und aus der neuen Potenz die Quadratwurzel zieht:

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n} \text{ für alle } a \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

a) Bestätigen Sie die Formel anhand dreier von Ihnen gewählter Zahlenbeispiele.

b) Beweisen Sie die Umformung mit Hilfe der Potenzgesetze.

c) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\left(\sqrt{3}\right)^6 \qquad \left(\sqrt{2}\right)^8$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 \qquad \left(\sqrt{5} + 3\sqrt{7}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{u-1} - \sqrt{u+1}\right)^2, \text{ wobei } u > 1$$

7. Quadratwurzeln können auch mit der Potenz $\frac{1}{2}$ geschrieben werden:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Begründen Sie dies knapp mit Hilfe der Potenzgesetze. Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Wurzeln ohne Exponenten:

$$3^{\frac{1}{2}} \qquad 7^{1,5}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-5}{2}}$$

8. Ein mögliches Verfahren zur Ermittlung von Näherungswerten von Quadratwurzeln ist die **Intervallschachtelung**. Zum Beispiel kann der Wert von $\sqrt{7}$ folgendermaßen abgeschätzt werden: Wegen

$$2^2 < 7 < 3^2$$

muss gelten

$$2 < \sqrt{7} < 3.$$

Durch weiteres Probieren findet man mit $2{,}6^2 = 6{,}76$ und $2{,}7^2 = 7{,}29$ weitere, engere Grenzen:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$$

Fortführung der Intervallschachtelung führt zu einem entsprechend genaueren Ergebnis, z.B.

$$2{,}64575131 < \sqrt{7} < 2{,}64575132.$$

Finden Sie eine Eingrenzung auf jeweils zwei geltende Ziffern zu folgenden Wurzeln:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{11} \qquad \sqrt{170}$$

Quadratwurzeln
Lösung

1.
- a) $\sqrt{49} = 7$
- b) $\sqrt{81} = 9$
- c) $\sqrt{64} = 8$
- d) $\sqrt{289} = 17$
- e) $\sqrt{1600} = 40$
- f) $\sqrt{169} = 13$
- g) $\sqrt{900} = 30$
- h) $\sqrt{196} = 14$
- i) $\sqrt{361} = 19$
- j) $\sqrt{225} = 15$
- k) $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$
- l) $\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$

2.
- a) $12 = \sqrt{144}$
- b) $17 = \sqrt{289}$
- c) $11 = \sqrt{121}$
- d) $0{,}4 = \sqrt{0{,}16}$
- e) $2{,}5 = \sqrt{6{,}25}$
- f) $0{,}14 = \sqrt{0{,}0196}$
- g) $\frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}$
- h) $\frac{1}{7} = \sqrt{\frac{1}{49}}$
- i) $\frac{11}{17} = \sqrt{\frac{121}{289}}$

3.
- a) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$
- b) $\sqrt{3} \approx 1{,}73$
- c) $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$
- d) $\sqrt{666} \approx 25{,}8$
- e) $\sqrt{0{,}961} \approx 0{,}980$
- f) $\sqrt{0{,}7} \approx 0{,}837$

4.

a	1	25	49	121	144	400	625
$\sqrt{a}$	1	5	7	11	12	20	25

5. Hinweis: Aus dieser Aufgabe sollten Sie die Erkenntnis mitnehmen, dass die Umrechnung $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ grundsätzlich falsch ist. Eine Wurzel kann also nicht auf eine Summe oder auf eine Differenz aufgeteilt werden.

   a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
   b) $\sqrt{144} + \sqrt{256} = 12 + 16 = 28$ und $\sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$
   c) $\sqrt{169} - \sqrt{25} = 13 - 5 = 8$ und $\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

6.
   a) z.B. $\sqrt{2}^2 = 2$ und $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$;
   $\sqrt{3}^2 = 3$ und $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$;
   $\sqrt{5}^2 = 5$ und $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$
   b) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a}}_{\text{n Faktoren}} = \sqrt{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}} = \sqrt{a^n}$
   c) $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 27$
   $\left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$
   $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 125$
   $\left(\sqrt{5} + 3\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{7} + \left(3\sqrt{7}\right)^2 = 68 + 6\sqrt{35}$
   $\left(\sqrt{u-1} - \sqrt{u+1}\right)^2 = u - 1 - 2\sqrt{u-1}\sqrt{u+1} + u + 1 = 2u - 2\sqrt{u^2 - 1}$

7. Für $a \geq 0$ gilt $\sqrt{a}^2 = a = a^1 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, also $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.
   $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
   $7^{1,5} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = \sqrt{343}$
   $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
   $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-5}{2}} = \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{+5}{2}} = \sqrt{3^5} = \sqrt{243}$

8. $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
   $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$
   $13 < \sqrt{170} < 14$